KARAKTERİSTİK FONKSİYON

X, bir t.d. ve $\varphi(x)$'de X'in bir reel fonksiyonu olsun. X'in beklenen değer ve varyansı daha önce verilmiştir. $\varphi(x)$ komplex değerler de alabilen bir fonksiyon ise $\varphi(x) = \mu(x) + i.\, \nu(x)$ burada $\mu(x)$ ve $\nu(x)$ X'in reel fonksiyonlarıdır. $\varphi(x)$'in beklenen değeri

$$E(\varphi(x)) = E(\mu(x)) + i.\, E(\nu(x))$$

olarak tanımlanır.

Tanım: t herhangi bir reel sayı olmak üzere X t.d. nin komplex fonksiyonu, $\varphi(x) = e^{itx} = \cos(tx) + i.\sin(tx)$ biçiminde veriliyor.

$\varphi(x)$'in beklenen değerine, X t.d. nin karakteristik fonksiyonu denir ve

$$\Phi_x(t) = E(e^{itx})$$

şeklinde gösterilir.

Karakteristik fonksiyonun, Moment Çıkaran Fonksiyonu ile ilişkisi söz konusudur.

$$\Phi_x(t) = M_x(it) = E(e^{itx})$$

yazılabilir.

a.) X, kesikli t.d. ve olasılık fonk. p(x) ise

$$\Phi_x(t) = E(e^{itx}) = \sum_{R_x} e^{itx} \cdot p(x),$$

b.) X, sürekli t.d. ve olasılık yoğ. fonksiyonu f(x) ise

$$\Phi_x(t) = E(e^{itx}) = \int_{R_x} e^{itx} f(x)\,dx$$

şeklinde hesaplanır.

$\Phi_x(t)$ nin Özellikleri

1.) $\Phi_x(0) = 1$

2.) $\Phi_{ax}(t) = \Phi_x(at)$

3.) $\Phi_{-x}(t) = \Phi_x(-t)$

Teorem: X t.d. nin karakteristik fonk. $\Phi_x(t)$ a ve b sabitler olmak üzere $Y = aX + b$ t.d. nin karakteristik fonk.nu

$$\Phi_Y(t) = e^{ibt}\,\Phi_x(at)$$

Tanımdan,

İspat: $\Phi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it.(aX+b)})$

$= E(e^{itb} \cdot e^{itaX})$

$= e^{itb} \cdot E(e^{i.t.aX})$

$= e^{itb} \cdot \Phi_X(a.t)$ bulunur.

Teorem: X ve Y bağımsız iki t.d. ise $Z = X+Y$, t.d. nin karakteristik fonk.

$$\Phi_Z(t) = \Phi_X(t) \cdot \Phi_Y(t)$$

İspat: $\Phi_Z(t) = E(e^{itZ}) = E(e^{it.(X+Y)})$

$= E(e^{itX} \cdot e^{itY}) = E(e^{itX}) \cdot E(e^{itY})$

$= \Phi_X(t) \cdot \Phi_Y(t)$

* Karakteristik fonksiyon ile momentler arasında aşağıdaki bağıntı vardır.

$$\Phi_X^{(n)}(t=0) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \Phi_X(t) \Big|_{t=0} = i^n \cdot m_n$$

$E(X^n) = i^{-n} \frac{\partial^n \Phi_X(t \ldots)}{\partial t^n}$

Burada $m_n = E(X^n)$, X t.d. nin sıfır etrafındaki n. momentidir.

X t.d. kesikli ise

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{R_X} e^{itx} \cdot p(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Phi_X(t) = \sum_{R_X} ix \cdot e^{itx} \cdot p(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Phi_X(t=0) = \Phi_X'(t=0) = \sum ix \cdot e^0 \cdot p(x)$$

$$= i \cdot E(X) = i \cdot m_1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi_x(t=0) = \sum_{R_x} i^2 x^2 . e^0 . p(x)$$
$$= i^2 . E(x^2) = i^2 . m_2 \ //$$

⋮

Herhangi k. türev için

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\Phi_x(t=0) = \sum_{R_x} i^k . x^k . e^0 . p(x)$$
$$= i^k . E(x^k) = i^k . m_k \text{ bulunur.}$$

Eğer X, t.d. ni sürekli ise ispatı benzer yolla yapılır:

__ÖRNEK__ : X, t.d. $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ değerlerini $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$ ihtimalleri ile almaktadır. $\Phi_x(t) = ?$

__Çözüm__: olasılık tablosu,

X	$-1/2$	0	$1/2$
$p(X=x)$	$1/4$	$2/4$	$1/4$

X, kesikli t.d. olduğu için

$$\Phi_x(t) = E(e^{itx}) = \sum_{i=1}^{3} e^{itx_i} . p(x_i)$$
$$= e^{-it/2} . \frac{1}{4} + e^{it.0} . \frac{2}{4} + e^{it/2} . \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4} . (e^{-it/2} + e^{it/2}) + \frac{2}{4} \ //$$

$$\left\{\begin{aligned} e^{itx} &= \cos tx + i.\sin tx \\ e^{-itx} &= \cos tx - i.\sin tx \end{aligned}\right\}$$ Euler formülü kullanılarak da,

$$= \frac{1}{4} . \left(\cos\frac{t}{2} - \cancel{i.\sin\frac{t}{2}} + \cos\frac{t}{2} + \cancel{i.\sin\frac{t}{2}}\right) + \frac{2}{4}$$
$$= \frac{1}{4} . 2\cos\frac{t}{2} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2} . \cos\frac{t}{2} + \frac{2}{4} \ //$$

bulunur.